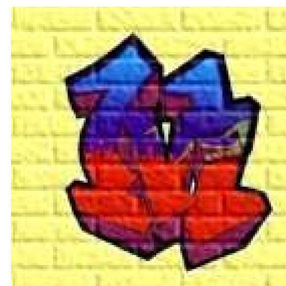
Matemática



4° año secundario



Vectores, refrescando conceptos adquiridos…

Te damos los elementos básicos de los vectores para que puedas entender las operaciones básicas.

El término **vector** puede referirse al:

- **concepto físico de vector**, cualquier magnitud física donde es importante considerar la dirección y el sentido;
- **concepto matemático de vector**, un conjunto ordenado de números reales;
- **vector en la geometría**, un segmento con propiedades de dirección, sentido y longitud;
- **vector biológico,** un agente generalmente orgánico que sirve como medio de transmisión de un organismo a otro.

En informática, **vector** puede hacer referencia al:

- **vector de datos**, un conjunto de variables del mismo tipo cuyo acceso se realiza por índices;
- **vector de interrupciones**, el registro que apunta a la dirección en memoria del gestor de la interrupción.

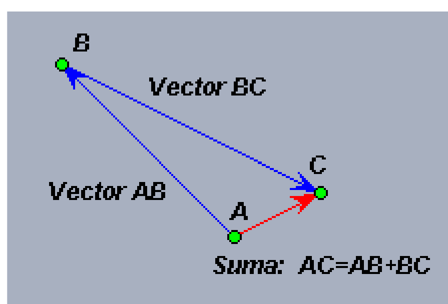
Nosotros solo trabajaremos con el **concepto de vector físico.**

En física, un **vector** es un ente determinado por cuatro características:

- una magnitud (también denominada módulo o intensidad),
- una dirección,
- un sentido y un punto de aplicación.

Se representa como $\vec{v}$. Es útil para describir magnitudes tales como posición, velocidades, aceleraciones, fuerzas, momento lineal, etc., que no pueden ser descritas tan solo por un número real.

Vamos a representar el itinerario de un avión que sale de la ciudad **A,** hace una parada técnica en la ciudad **B,** y luego continúa hasta la ciudad **C.**



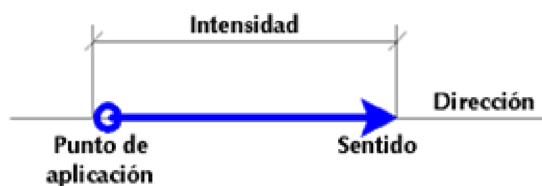
En el esquema anterior, los desplazamientos del avión están indicados con **vectores.**

- Un **vector** es un segmento dirigido que tiene un **origen** y un **extremo.**

Por ejemplo el vector con origen **A** y extremo **B** lo indicamos:

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ o simplemente $\overrightarrow{\mathbf{v}}$

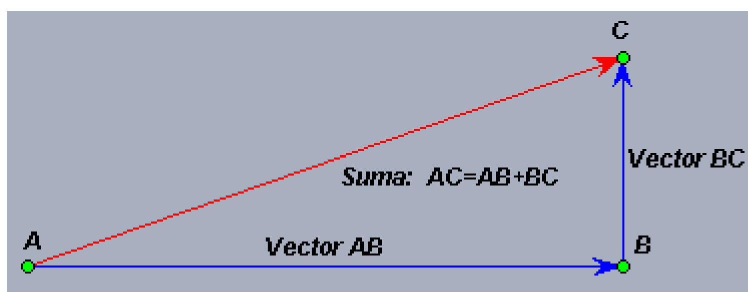
- Un vector tiene una **longitud** o **módulo**.
- Además tiene una **dirección**, que está dada por la recta que lo contiene;
- y un **sentido** indicado por la flecha.



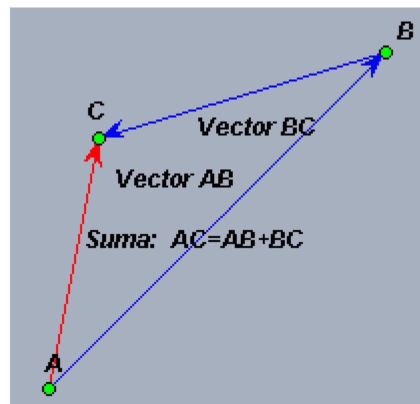
En el esquema de los vuelos del avión, realizar los desplazamientos v y u sucesivamente es equivalente a desplazarse desde **A** hasta **C:**

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{w}}$$

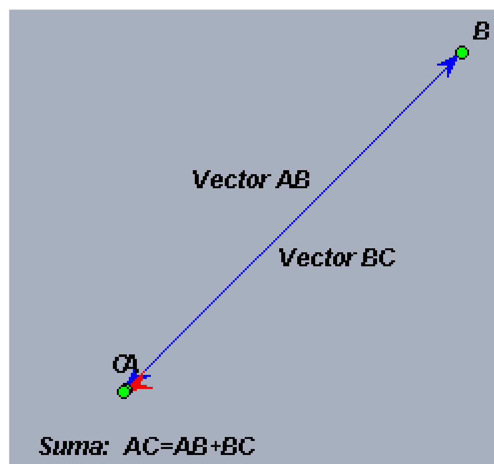
Supongamos que **A, B** y **C** están en otras posiciones:



Movemos el punto **C**



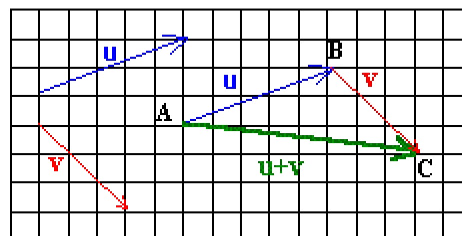
Si hacemos coincidir **C** con **A,** obtenemos el vector nulo:



Realicemos la suma entre "otros" dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, (**u** + **v)**, pero ahora en una hoja cuadriculada, porque quizás te resulta más sencillo.

- A partir del punto **A**, ponemos el *origen* de **u**
- En el *extremo* de **u**, o sea en **B**, ponemos el *origen* de **v**, hasta llagar a **C**

Uniendo el *origen* de **u** (**A**) con el *extremo* de **v** (**C**)
se obtiene el vector **u + v = AC**



Mediante pares de números es más sencillo aún:

Sean $\vec{u}$ =(5:2) y $\vec{v}$=(3:-3)

u + v = (5,2) +(3,-3) = (5+3,2-3) = (8,-1).

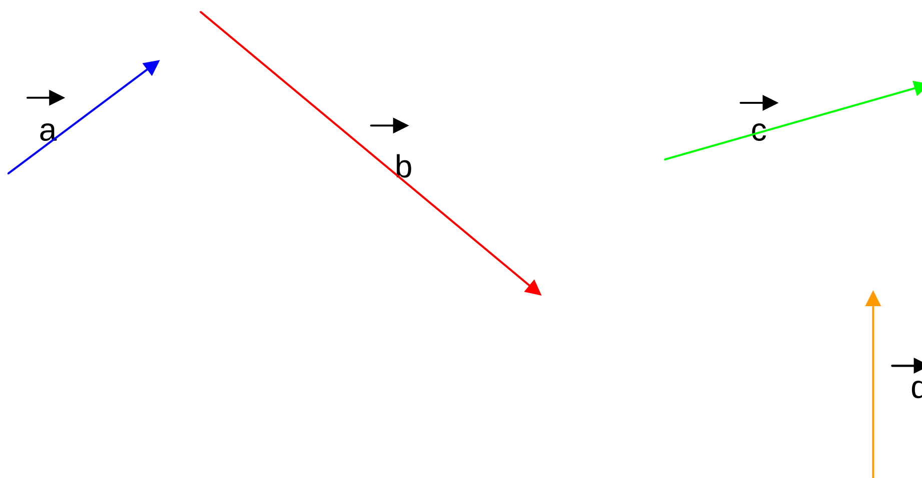
Cuando **sumamos vectores obtenemos otro vector**, y aplicando la **regla de la poligonal** obtenemos el vector suma.

Esta regla consiste en dibujar el primero de los vectores y luego el siguiente, colocando el origen del segundo en el extremo del primero, y así sucesivamente. Y el vector **suma** será desde el origen del primero hasta el extremo del último

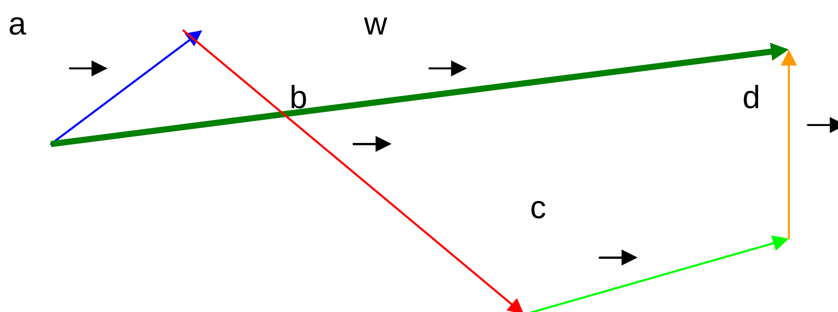
Importante: los vectores deben ser paralelos y congruentes a los vectores dados originalmente.

Por ejemplo:

Dados

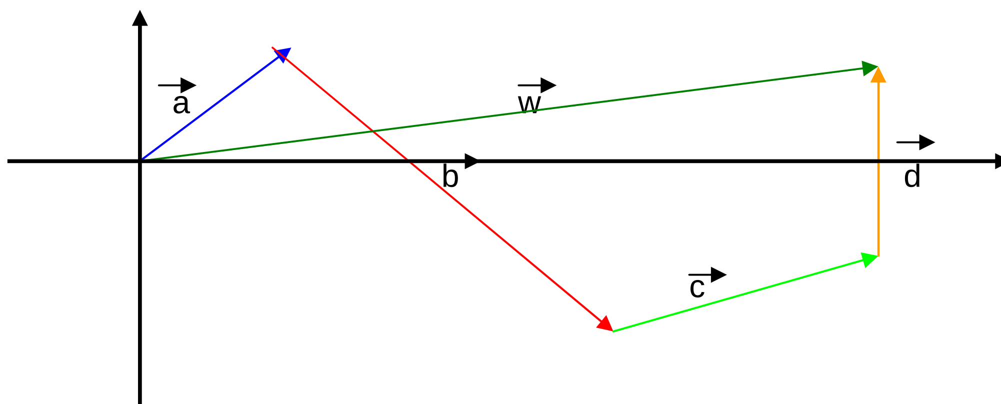


Obtené $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{w}$ aplicando el método de la poligonal.



Se pueden representar sobre un sistema cartesiano ortogonal, los ejes xy.

En cuyo caso debemos colocar al primer vector para que coincida su origen con el origen de las coordenadas.





Si tenés acceso, te recomendamos que visites:
http://www.xtec.es/~jbartrol/vectores/unidad1.html
http://personal1.iddeo.es/romeroa/vectores/default.htm
http://platea.pntic.mec.es/anunezca/UnidDidVectores/indice/indice.htm

Y si querés jugar con vectores podes visitar:
http://www.frontiernet.net/~imaging/vector_calculator.html

- **Vectores linealmente independientes**

En álgebra lineal, un conjunto de vectores es **linealmente independiente** si ninguno de ellos puede ser escrito con una combinación lineal de los restantes.

Un vector **A** se dice que es **combinación lineal** de un conjunto de vectores **X=**$\mathbf{A_1,A_2,A_3,\ldots A_n}$ si existe una forma de expresarlo como suma de parte o todos los vectores de X multiplicados cada uno de ellos por un coeficiente escalar $\mathbf{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n}$ de forma que:

$$X = k_1A_1, k_2A_2, k_3A_3, \ldots, k_nA_n = \sum_{i=1}^{n} k_iA_i$$

Así, **A** es **combinación lineal** de vectores de **X** si podemos expresar **A** como una suma de múltiplos de una cantidad finita de elementos de **X.**

Por ejemplo, en $\mathbf{R}^3$:

Los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) son linealmente independientes, ninguno puede ser obtenido a partir de los otros.

Mientras que (2, −1, 1), (1, 0, 1) y (3, −1, 2) no lo son, ya que el tercero es la suma de los dos primeros.

Los vectores que no son linealmente independientes son **linealmente dependientes**.

Uno de los métodos para determinar la independencia de vectores lo estudiaremos en el encuentro 5.

- **Significación geométrica de la independencia lineal**

Geométricamente, dos vectores son independientes si no tienen la misma dirección (con sentidos idénticos u opuestos). Esta definición supone que el vector nulo tiene todas las direcciones.

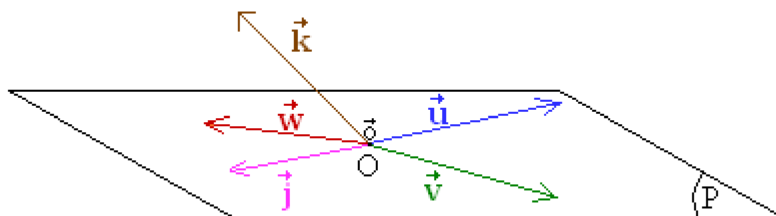
Tres vectores son independientes si y solo si no están contenidos en el mismo plano vectorial, o sea si ninguno de ellos es una **combinación lineal** de los otros dos, no se puede obtener a partir de los otros (en cuyo caso estaría en el plano generado por estos vectores).

- **Espacio vectorial**

El **espacio generado** por un sistema de vectores es el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores.
Si *n* vectores son independientes, generan el espacio de **dimensión** *n* (dimensión en el sentido usual: 0 para un punto, 1 para una recta, 2 para un plano...).

Ejemplo:

En el espacio tridimensional usual (denotamos a los vectores con negrita):



u y **j** son dependientes por tener la misma dirección (y sentidos opuestos).

u y **v** son independientes y definen el plano P.

u, **v** y **w** son dependientes por estar los tres contenidos en el mismo plano.

u **v** y **k** son independientes por serlo **u** y **v** entre sí y no ser **k** una combinación lineal de ellos o, lo que es lo mismo, por no pertenecer al plano P. Los tres vectores definen el espacio tridimensional.

Los vectores **o** (vector nulo, cuyas componentes son iguales a cero) y **k** son dependientes ya que **o** = 0 ·**k**



Actividad 1

Indicá si los siguientes grupos de vectores son linealmente independientes o dependientes.

a) $\vec{u} = (1;2)$ y $\vec{v} = (2;4)$ y $\vec{w} = (0;1)$

b) $\vec{a} = (1;2;3)$ $\vec{b} = (3;6;9)$ $\vec{c} = (5;7;0)$ y $\vec{d} = (6;9;3)$



CLAVE DE LAS ACTIVIDADES

Actividad 1

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, ya que $\vec{v} = 3.\vec{u}$
$\vec{w}$ es linealmente independiente con $\vec{u}$ (ó con $\vec{v}$)

b) $\vec{b} = 3.\vec{a}$ (linealmente dependientes)
$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ (linealmente independientes)
$\vec{c}$ es linealmente independiente.